Par suite $\varphi_n(2\text{Log}(n)) < \varphi_n(\alpha_n) < \varphi_n(\text{Log}(n))$

$\Rightarrow \text{Log}(n) < \alpha_n < 2\text{Log}(n)$ car φ_n est $\searrow$ sur $[\text{Log}(n), 2\text{Log}(n)]$

b- • déjà $\text{Log}(n) < \alpha_n$.

• $\alpha_n < 2\text{Logn} \Leftrightarrow f_n(\alpha_n) < f_n(2\text{Logn})$

(car f_n est $\nearrow$ sur D_n puisque $f'_n(x) = \dfrac{n}{1+nx} > 0$)

$\Leftrightarrow \alpha_n < \text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]$ car $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$.

Conclusion : $\text{Log}(n) < \alpha_n < \text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]$.

c- $\forall n \geq 2 ; \text{Log}(n) < \alpha_n < \text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2 ; 1 < \dfrac{\alpha_n}{\text{Logn}} < \dfrac{\text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]}{\text{Logn}}$

$\boxdot \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]}{\text{Logn}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\left[n(\frac{1}{n} + 2\text{Logn})\right]}{\text{Logn}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Log}[n] + \text{Log}\left[\frac{1}{n} + 2\text{Logn}\right]}{\text{Logn}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 + \dfrac{\text{Log}\left[\frac{1}{n} + 2\text{Logn}\right]}{\frac{1}{n} + 2\text{Logn}} \times \dfrac{\frac{1}{n} + 2\text{Logn}}{\text{Logn}} \right]$

$= 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\text{Log}\left[\frac{1}{n} + 2\text{Logn}\right]}{\frac{1}{n} + 2\text{Logn}} \right) \times \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{n\text{Logn}} + 2 \right]$

(on pose: $X = \dfrac{1}{n} + 2\text{Logn} \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$)

$= 1 + \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\text{Log}X}{X} \times 2 = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq 2; 1 < \dfrac{\alpha_n}{\text{Logn}} < \dfrac{\text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]}{\text{Logn}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{Log}[1 + 2n\text{Logn}]}{\text{Logn}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\text{Logn}} = 1$$

4/a- Soit $M(x,y)$ un point d'image $M'(x',y')$ par Φ.

$M(x,y)$ donc $H(0,y)$ est le projeté orthogonal de M sur $\left(O, \vec{j}\right)$

$M'(x',y')$ barycentre de H affecté de (n-2) et $M(x,y)$ affecté de 2

$\Leftrightarrow (n-2)\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{O}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (n-2)(x'-0) + 2(x'-x) = 0 \\ (n-2)(y'-y) + 2(y'-y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{2}{n}x \\ y' = y \end{array} \right.$$

Ainsi : $\Phi : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{2}{n}x \\ y' = y \end{array} \right.$

b- Soit $M(x,y)$ un point d'image $M'(x',y')$ par Φ.